e a densidade de corrente é dada por:

$$J^0 = c\rho = \psi^\dagger \psi c = (\varphi^\dagger, \chi^\dagger) c \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} = (\varphi^\dagger \varphi + \chi^\dagger \chi) c$$

$$\vec{J} = \psi^\dagger c \vec{\alpha} \psi = (\varphi^\dagger, \chi^\dagger) c \left(\begin{array}{c|c} 0 & \vec{\sigma} \\ \hline \vec{\sigma} & 0 \end{array} \right) \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix}$$

$$= c (\varphi^\dagger \vec{\sigma} \chi + \chi^\dagger \vec{\sigma} \varphi)$$

§ <u>Soluções tipo ondas planas e projetores</u>

Procuramos soluções "livres" da eq. de Dirac na forma

$$\psi^{(+)}(x) = e^{-ik\cdot x} u(k) \quad \text{(de energia positiva)}$$

$$\psi^{(-)}(x) = e^{ik\cdot x} v(k) \quad \text{(de energia negativa)}$$

$$k\cdot x = k^\mu x_\mu = k_\mu x^\mu = k^0 ct - \vec{k}\cdot\vec{x} ,$$

com $k^0 > 0$ e $p^\mu = \hbar k^\mu$, de maneira que

$$p^\mu p_\mu = \frac{E^2}{c^2} - \vec{p}^{\,2} = \hbar^2 k^\mu k_\mu = m^2 c^2 ,$$

e para satisfazer Klein-Gordon, temos

$$k^\mu k_\mu = \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} = (k^0)^2 - \vec{k}^{\,2} .$$

Seja o caso $m \neq 0$; escolhendo o sistema de referência onde a partícula está em repouso

$$k^\mu = \left(\frac{mc}{\hbar}, 0 \right)$$

A eq. de Dirac pode ser escrita na forma

$$\left(i\gamma^\mu \partial_\mu - \frac{mc}{\hbar}\right)\psi = 0$$

$$\gamma^\mu \partial_\mu \psi^{(+)} = \gamma^0 \left(\frac{\partial}{c\partial t} e^{-ik^0 ct}\right) u(k)$$

$$= -ik_0 \gamma^0 u(k) = -i \frac{mc}{\hbar} \gamma^0 u(k)$$

Portanto :

$$\begin{cases} \frac{mc}{\hbar}\left(\gamma^0 - 1\right) u(k) = 0 & (E>0) \\ -\frac{mc}{\hbar}\left(\gamma^0 + 1\right) v(k) = 0 & (E<0) \end{cases}$$

$$\gamma^0 - 1 = \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & -2 \end{array}\right)$$

$$\gamma^0 + 1 = \left(\begin{array}{c|c} 2 & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$$

De maneira que temos soluções linearmente independentes:

$$u^{(1)}\left(\frac{mc}{\hbar}, \vec{0}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \hdashline 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u^{(2)}\left(\frac{mc}{\hbar}, \vec{0}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \hdashline 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

e

$$v^{(2)}\left(\frac{mc}{\hbar},0\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v^{(2)}\left(\frac{mc}{\hbar},0\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Para $\vec{k} \neq 0$, temos as equações:

$$\left(\not{k} - \frac{mc}{\hbar}\right) u(k) = 0, \qquad \left(\not{k} + \frac{mc}{\hbar}\right) v(k) = 0$$

Esta solução pode ser encontrada, aplicando uma transformação de Lorentz com velocidade

$$v = \frac{\hbar|\vec{k}|}{m(v)} = \frac{|\vec{k}|}{k_0} c$$

Mais simples, notar que

$$\left(\not{k} - \frac{mc}{\hbar}\right)\left(\not{k} + \frac{mc}{\hbar}\right) = k^\mu k_\mu - \frac{m^2c^2}{\hbar^2} = 0,$$

de maneira que construímos soluções na forma:

$$u^{(\alpha)}(k) = A^{(\alpha)}\left(\not{k} + \frac{mc}{\hbar}\right) u^{(\alpha)}(m,0)$$

$$v^{(\alpha)}(k) = B^{(\alpha)}\left(-\not{k} + \frac{mc}{\hbar}\right) v^{(\alpha)}(m,0) = -B\left(\not{k} - \frac{mc}{\hbar}\right) v^{(\alpha)}$$

<u>Tarefa</u>: procurar formas explícitas e a normalização

$$\not{k} = k_\mu \gamma^\mu = k_0 \beta - \beta(\vec{k}\cdot\vec{\alpha})$$

$$\not{k} = k_0\beta - \beta(\vec{k}\cdot\vec{\alpha}) = k_0\beta - |\vec{k}|\,\beta(\vec{\alpha}\cdot\hat{k})$$

$$\longleftrightarrow\ k_0 \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & -1 \end{array}\right) - |\vec{k}| \left(\begin{array}{c|c} 0 & (\vec{\sigma}\cdot\hat{k}) \\ \hline -(\vec{\sigma}\cdot\hat{k}) & 0 \end{array}\right)$$

$$= k_0 \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & -1 \end{array}\right) + |\vec{k}| \left(\begin{array}{c|c} 0 & -(\vec{\sigma}\cdot\hat{k}) \\ \hline (\vec{\sigma}\cdot\hat{k}) & 0 \end{array}\right)$$

Assim, operando sobre uma solução de energia positiva, temos (usando bi-spinores):

$$\not{k}\, u^{(\alpha)}(m,0) \longleftrightarrow \not{k} \begin{pmatrix} \varphi_0 \\ \hline 0 \end{pmatrix}$$

$$= k_0 \begin{pmatrix} \varphi(m,0) \\ \hline 0 \end{pmatrix} + |\vec{k}| \begin{pmatrix} 0 \\ \hline (\vec{\sigma}\cdot\hat{k})\varphi(m,0) \end{pmatrix}$$

Em total:

$$u(k) = A \begin{pmatrix} \left(k_0 + \frac{mc}{\hbar}\right)\varphi(m,0) \\ \hline |\vec{k}|\,(\vec{\sigma}\cdot\hat{k})\,\varphi(m,0) \end{pmatrix}$$

Calculamos agora a constante de normalização:

$$u^{\dagger}(k) = A^{*}\left(\left(k_0 + \frac{mc}{\hbar}\right) \varphi^{\dagger}(m,0), \right.$$

$$\left. |\vec{k}|\, \varphi^{\dagger}(m,0)(\vec{\sigma}\cdot\hat{k}) \right)$$

$$u^{\dagger}(k)\, u(k) = |A|^2 \left\{ \left(k_0 + \frac{mc}{\hbar}\right)^2 \varphi^{\dagger}(m,0)\varphi(m,0) + \right.$$

$$\left. + \vec{k}^2\, \varphi^{\dagger}(m,0)(\vec{\sigma}\cdot\hat{k})^2 \varphi(m,0) \right\} = 1,$$

supondo o $\varphi(m,0)$ normalizado, $\varphi^{\dagger}\cdot\varphi = 1$, e notando que $(\vec{\sigma}\cdot\hat{k})^2 = 1$

$$1 = |A|^2 \left[\left(k_0 + \frac{mc}{\hbar}\right)^2 + \vec{k}^2 \right], \quad \vec{k}^2 = \frac{1}{\hbar^2}\left(\frac{E^2}{c^2} - m^2c^2\right)$$

$$k_0 = \frac{E}{c\hbar}$$

$$1 = |A|^2 \frac{1}{\hbar^2} \left[\left(\frac{E}{c} + mc\right)^2 + \frac{E^2}{c^2} - m^2c^2 \right]$$

$$= \frac{|A|^2}{\hbar^2 c^2} \left[(E + mc^2)^2 + E^2 - m^2c^4 \right]$$

$$= \frac{|A|^2}{(\hbar c)^2} \left(E^2 + 2Emc^2 + \cancel{m^2c^4} + E^2 - \cancel{m^2c^4} \right)$$

$$1 = \frac{2}{\hbar^2 c^2} |A|^2\, E\,(E + mc^2)$$

ou $$|A| = \frac{\hbar c}{\sqrt{2E(E+mc^2)}}$$

O spinor de energia positiva, normalizado é

$$\psi^{(+)}_{(x)} = e^{-ik\cdot x} \begin{pmatrix} \dfrac{\hbar c\left(k_0 + \frac{mc}{\hbar}\right)}{\sqrt{2E(E+mc^2)}} \varphi(m,0) \\ \hline \dfrac{\hbar c\,|\vec{k}|\,(\vec{\sigma}\cdot\hat{k})}{\sqrt{2E(E+mc^2)}} \varphi(m,0) \end{pmatrix},$$

$(k_0 = E/\hbar c)$

onde $\varphi(m,0)$ é um spinor geral

$$\varphi(m,0) = \varphi_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \varphi_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Mas a normalização acima não é a mais comum na literatura. Notemos primeiro como escrever a eq. adjunta na notação manifestamente covariante:

$$(i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu - mc)\psi = 0 \qquad (1)$$

$$-\psi^\dagger(i\hbar(\gamma^\mu)^\dagger\overleftarrow{\partial}_\mu + mc) = 0 \qquad (2)$$

O que é $(\gamma^\mu)^\dagger$?

$$(\gamma^\mu)^\dagger = ?, \quad \gamma^{0\dagger} = \gamma^0, \quad (\gamma^0)^2 = 1$$

$$(\gamma^i)^\dagger = (\beta\alpha^i)^\dagger = \alpha^i\beta = \alpha^i\gamma^0$$
$$= \gamma^0(\gamma^0\alpha^i)\gamma^0 = \gamma^0\gamma^i\gamma^0$$
$$(\gamma^0)^\dagger = \gamma^0 = \gamma^0\gamma^0\gamma^0$$
$$(\gamma^\mu)^\dagger = \gamma^0\gamma^\mu\gamma^0$$

A equação (2) fica na forma:

$$\psi^\dagger\gamma_0\left(i\hbar\gamma^\mu\overleftarrow{\partial_\mu} + mc\right)\cancel{\gamma^0} = 0 ,$$

▶ **Def**: Adjunto de Dirac

$$\overline{\psi} \equiv \psi^\dagger\gamma^0$$

A eq. (2) pode ser escrita em termos do adjunto de Dirac:

$$\overline{\psi}\left(i\hbar\overleftarrow{\not{\partial}} + mc\right) = 0 \qquad (2a)$$

e

$$\left(i\hbar\overrightarrow{\not{\partial}} - mc\right)\psi = 0 \qquad (1a)$$

$$0 = (2a)\psi + \overline{\psi}(1a) = \overline{\psi}\left(i\hbar\overleftarrow{\not{\partial}} + mc\right)\psi + $$
$$+ \overline{\psi}\left(i\hbar\overrightarrow{\not{\partial}} - mc\right)\psi$$

$$0 = \overline{\psi}\left(\overleftarrow{\not{\partial}} + \overrightarrow{\not{\partial}}\right)\psi = \partial_\mu\left(\overline{\psi}\gamma^\mu\psi\right),$$

forma covariante da eq. de continuidade

Com quadrivetor densidade de corrente:

$$J^\mu \equiv \bar{\psi}\gamma^\mu\psi,$$

$$\partial_\mu J^\mu = 0.$$

A normalização é escolhida para termos

$$\bar{\psi}\psi = 1, \text{ (energia positiva)}$$

$$\bar{\psi}\psi = -1, \text{ (energia negativa)}$$

Neste caso, os spinores normalizados tem

$$(\varphi^\dagger, \chi^\dagger)\gamma^0\begin{pmatrix}\varphi\\ \chi\end{pmatrix} = \pm 1$$

$$= \varphi^\dagger\varphi - \chi^\dagger\chi$$

• Exercício. Mostrar os spinores para ondas planas se escrevem

a) energia positiva:

$$\psi^{(+)}(x) = e^{-ik\cdot x}\cdot\begin{pmatrix}\sqrt{\dfrac{E+mc^2}{2mc^2}}\;\varphi^{(\alpha)}_{(m,0)}\\ \hline \dfrac{\hbar c|\vec{k}|(\vec{\sigma}\cdot\hat{k})}{\sqrt{2mc^2(E+mc^2)}}\;\varphi^{(\alpha)}_{(m,0)}\end{pmatrix}$$

$$kx = k_\mu x^\mu$$
$$= k_0 x^0 - \vec{k}\cdot\vec{x}$$

b) energia negativa :

$$\psi^{(-)}(x) = e^{ik\cdot x} \cdot \begin{pmatrix} \dfrac{\hbar c|\vec{k}|(\vec{\sigma}\cdot\hat{k})}{\sqrt{2mc^2(|E|+mc^2)}}\, \chi^{(\alpha)}_{(m,0)} \\ \hdashline \sqrt{\dfrac{|E|+mc^2}{2mc^2}}\, \chi^{(\alpha)}_{(m,0)} \end{pmatrix},$$

com :

$$\bar{\psi}^{(-)}\psi^{(-)} = -1 \;;$$

c) Mostrar que $\psi^{(+)}$ e $\psi^{(-)}$ são ortogonais

Temos sempre duas soluções l. i. , com índice $\alpha = 1,2$

$u^{(\alpha)}(k)$: energia positiva , $E = |E|$

$v^{(\alpha)}(k)$: energia negativa , $E = -|E|$

Com relações de ortogonalidade:

$$\bar{u}^{(\alpha)}(k)\, u^{(\beta)}(k) = \delta_{\alpha\beta} \;, \quad \bar{v}^{(\alpha)}(k)\, v^{(\beta)}(k) = -\delta_{\alpha\beta} \,,$$

$$\bar{u}^{(\alpha)}(k)\, v^{(\beta)}(k) = \bar{v}^{(\alpha)}(k)\, u^{(\beta)}(k) = 0 \,.$$

$$u^{(\alpha)}(k) = \frac{(\not{k} + mc/\hbar)\,c\hbar}{\sqrt{2mc^2(E+mc^2)}}\, u^{(\alpha)}(m,0)$$

$$v^{(\alpha)}(k) = \frac{(-\not{k} + mc/\hbar)c\hbar}{\sqrt{2mc^2(|E|+mc^2)}}\, v^{(\alpha)}(m,0)$$

e os correspondentes adjuntos de Dirac:

$$\bar{u}^{(\alpha)}(k) = u^{(\alpha)\dagger}(m,0)\, \frac{(\not{k}^{\dagger} + mc/\hbar\,)\,\gamma_0\, c\hbar}{\sqrt{2mc^2(E+mc^2)}}$$

$$= \frac{u^{(\alpha)\dagger}(m,0)\,\gamma_0\,(\not{k} + mc/\hbar)\,\gamma_0^2\; c\hbar}{\sqrt{2mc^2(E+mc^2)}}$$

$$\bar{u}^{(\alpha)}(k) = \bar{u}^{(\alpha)}(m,0)\, \frac{(\not{k} + mc/\hbar\,)\,c\hbar}{\sqrt{2mc^2(E+mc^2)}}$$

Similarmente:

$$\bar{v}^{(\alpha)}(k) = \bar{v}^{(\alpha)}(m,0)\, \frac{(-\not{k} + mc/\hbar\,)\,c\hbar}{\sqrt{2mc^2(E+mc^2)}}$$

d) Para termos a ortogonalidade com <u>spin definido</u>

$$\bar{u}^{(\alpha)}(k)\, u^{(\beta)}(k) = 0 \quad , \quad \alpha \neq \beta$$

$$\bar{v}^{(\alpha)}(k)\, v^{(\beta)}(k) = 0 \; ,$$

precisamos construir os spinores $u^{(\alpha)}(m,0)$ e $v^{(\alpha)}(m,0)$ como tendo polarização definida, isto é diagonalizando o operador "helicidade":

$(\vec{\sigma} \cdot \hat{k})$: projeção de $\vec{\sigma}$ em $\vec{k}$

▸ **Exercício**: mostrar as identidades

$$\left(\not{k}+\frac{mc}{\hbar}\right)\gamma^0\left(\not{k}+\frac{mc}{c}\right)=\frac{2E}{c\hbar}\left(\not{k}+\frac{mc}{\hbar}\right)$$

$$\left(\not{k}+\frac{mc}{\hbar}\right)^2=2\frac{mc}{\hbar}\left(\not{k}+\frac{mc}{\hbar}\right)$$

▸ **Def**: Projetores $\Lambda_+(k)$, $\Lambda_-(k)$

$$\Lambda_+(k)\equiv\sum_{\alpha}u^{(\alpha)}(k)\otimes\overline{u}^{(\alpha)}(k)$$

$$\Lambda_-(k)\equiv-\sum_{\alpha}v^{(\alpha)}(k)\otimes\overline{v}^{(\alpha)}(k)$$

Cálculo explícito:

$$\Lambda_+(k)=\frac{c^2\hbar^2}{\sqrt{2mc^2(E+mc^2)}}\left(\not{k}+mc/\hbar\right)\sum_{\alpha=1,2}u^{(\alpha)}_{(m,0)}\otimes u^{(\alpha)+}_{(m,0)}$$

$$\cdot\gamma^0\frac{\left(\not{k}+mc/\hbar\right)}{\sqrt{2mc^2(E+mc^2)}}$$

Notar que

$$\sum_{\alpha=1,2}u^{(\alpha)}_{(m,0)}u^{(\alpha)+}_{(m,0)}=\frac{1+\gamma^0}{2}\leftrightarrow\left(\begin{array}{c|c}1&0\\\hline 0&0\end{array}\right)$$

$$\frac{1+\gamma^0}{2}\gamma^0=\frac{1+\gamma^0}{2}$$

$$\Lambda_+(k)=\frac{c^2\hbar^2}{2mc^2(E+mc^2)}\left(\not{k}+mc/\hbar\right)\left(\frac{1+\gamma^0}{2}\right)\left(\not{k}+mc/\hbar\right)$$

$$\Lambda_+(k) = \frac{\hbar^2 c^2}{2mc^2(E+mc^2)}\left\{\frac{1}{\cancel{2}}\cdot\frac{\cancel{2}mc}{\hbar}\left(\not{k}+\frac{mc}{\hbar}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\cancel{2}}\frac{\cancel{2}E}{c\hbar}\left(\not{k}+\frac{mc}{\hbar}\right)\right\}$$

$$= \frac{\hbar^2 c^2}{2mc^2(E+mc^2)}\left\{\frac{mc}{\hbar}+\frac{E}{c\hbar}\right\}\left(\not{k}+\frac{mc}{\hbar}\right)$$

$$= \frac{\hbar^2 c^2}{2mc^2\cancel{(E+mc^2)}}\frac{\cancel{(E+mc^2)}}{\hbar c}\left(\not{k}+\frac{mc}{\hbar}\right)$$

$$\Lambda_+(k) = \frac{\hbar^2 c^2}{2mc^3\hbar}\left(\not{k}+\frac{mc}{\hbar}\right) = \frac{\hbar}{2mc}\left(\not{k}+\frac{mc}{\hbar}\right)$$

Similarmente:

$$\Lambda_-(k) = \frac{\hbar^2 c^2}{2mc^3\hbar}\left(-\not{k}+\frac{mc}{\hbar}\right) = \frac{\hbar}{2mc}\left(-\not{k}+\frac{mc}{\hbar}\right),$$

Com a propriedade:

$$\Lambda_+(k)+\Lambda_-(k) = \frac{1}{2}+\frac{1}{2} = 1.$$

Os operadore $\Lambda_\pm(k)$ projetam sobre os estados de energia positiva e negativa, respectivamente. Satisfazem propriedades de operador de projeção:

$$\Lambda_+^2(k) = \frac{\hbar^2}{4m^2c^2}\left(\not{k}+\frac{mc}{\hbar}\right)^2 = \frac{\hbar^2}{4m^2c^2}\frac{2mc}{\hbar}\left(\not{k}+\frac{mc}{\hbar}\right)$$

$$= \frac{\hbar}{2mc}\left(\not{k}+\frac{mc}{\hbar}\right) = \Lambda_+(k)$$

$$\Lambda_\pm^2(k) = \Lambda_\pm(k)$$

Lembrar também que $Tr\,\beta = Tr(\beta\alpha^i) = Tr(\alpha^i\beta) = 0$

$$\Rightarrow \quad Tr\,\Lambda_\pm(k) = 4\,\frac{\hbar}{2mc}\,\frac{mc}{\hbar} = 2$$

$$\Lambda_-(k)\Lambda_+(k) = \frac{\hbar^2}{4m^2c^2}\left(-\not{k}+\frac{mc}{\hbar}\right)\left(\not{k}+\frac{mc}{\hbar}\right)$$

$$= \frac{\hbar^2}{4m^2c^2}\left(\frac{m^2c^2}{\hbar^2} - k^2\right) = 0$$

- Projetor do spin:

Seja n um vetor normalizado tipo espaço, $n^2 = -1$, ortogonal a k. O que é o operador $\not{n}$?

$$\not{n} = -\vec{n}\cdot\vec{\gamma} = -\beta(\vec{n}\cdot\vec{\alpha})$$

$$= \left(\begin{array}{c|c} 0 & -(\vec{\sigma}\cdot\hat{n}) \\ \hline (\vec{\sigma}\cdot\hat{n}) & 0 \end{array}\right),$$

assim $$\gamma^5\not{n} = \left(\begin{array}{c|c} 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} 0 & -(\vec{\sigma}\cdot\hat{n}) \\ \hline (\vec{\sigma}\cdot\hat{n}) & 0 \end{array}\right)$$

$$= \left(\begin{array}{c|c} (\vec{\sigma}\cdot\hat{n}) & 0 \\ \hline 0 & -(\vec{\sigma}\cdot\hat{n}) \end{array}\right),$$

portanto, podemos construir o projetor:

$$P(n) = \frac{1+\gamma^5 \not{n}}{2} =$$

$$= \left(\begin{array}{c:c} \frac{1+(\vec{\sigma}\cdot\hat{n})}{2} & 0 \\ \hdashline 0 & \frac{1-(\vec{\sigma}\cdot\hat{n})}{2} \end{array} \right)$$

$P(n)$ projeta sobre estados, que no sistema de referência em repouso, têm spin $\frac{\vec{\sigma}\cdot\hat{n}}{2} = +\frac{1}{2}$ para estados de energia positiva, e spin $\frac{\vec{\sigma}\cdot\hat{n}}{2} = -\frac{1}{2}$ para estados de energia negativa.

Temos as propriedades:

$$[\Lambda_\pm(k), P(n)] = 0 \quad ,$$

$$\sum_{\sigma,\lambda=\pm} \Lambda_\sigma(k) P(\lambda n) = 1 \; ,$$

$$\mathrm{Tr}\, \Lambda_\pm(k) P(\pm n) = 1 \; .$$

__Ref__: "Quantum Field Theory", C. Itzykson e J-B Zuber, Cap. 2 (McGraw-Hill, 1985)

§ Acoplamento eletromagnético

Queremos agora incluir na eq. de Dirac o acoplamento de uma partícula carregada com um campo eletromagnético (clássico) caraterizado pelo seu potencial quadrivetor

$$A^\mu = (\phi, \vec{A}) \,, \quad A_\mu = (\phi, -\vec{A})$$

Obtemos o acoplamento relevante, usando o Princípio do Acoplamento mínimo:

$$i\hbar\partial_\mu \longrightarrow i\hbar\left(\partial_\mu + \frac{ie}{\hbar c}A_\mu\right)$$

ou

$$i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu \longrightarrow i\hbar\left(\gamma^\mu\partial_\mu + \frac{ie}{\hbar c}\gamma^\mu A_\mu\right)$$

$$i\hbar\not\partial \longrightarrow i\hbar\left(\not\partial + \frac{ie}{\hbar c}\not A\right),$$

e a equação de Dirac fica:

$$\left(i\hbar\not\partial - \frac{e}{c}\not A - mc\right)\psi = 0 \qquad (*)$$

Esta forma é invariante por uma transformação de "gauge" (calibre):

$$\begin{cases} A_\mu \rightarrow A_\mu - \partial_\mu\Lambda \,, \\ \psi(x) \rightarrow e^{\frac{i}{\hbar}\left(\frac{e}{c}\right)\Lambda}\,\psi(x) \,, \end{cases}$$

onde os potenciais e a fase da função de onda são mudados simultaneamente (para um elétron, $e = -|e| < 0$). Escrevendo a eq. (*) em forma explícita:

$$i\hbar\gamma^0\partial_0\psi + i\hbar\gamma^i\partial_i\psi - \frac{e}{c}\gamma^0 A_0\psi - \frac{e}{c}\gamma^i A_i\psi =$$
$$= mc\psi\,,$$

multiplicando por $\gamma^0 = \beta$, pela esquerda

$$i\hbar\partial_0\psi + i\hbar(\vec{\alpha}\cdot\nabla)\psi - \frac{e}{c}A_0\psi + \frac{e}{c}(\vec{\alpha}\cdot\vec{A})\psi =$$
$$= mc\beta\psi$$

ou

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi = \left[c\hbar\frac{(\alpha\cdot\nabla)}{i} - e(\vec{\alpha}\cdot\vec{A}) + eA_0\right]\psi +$$
$$+ mc^2\beta\psi$$

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi = \left[c\vec{\alpha}\cdot\left(\frac{\hbar\nabla}{i} - \frac{e}{c}\vec{A}\right) + e\phi\right]\psi + mc^2\beta\psi\,,$$

ou de outra maneira:

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi = (c\vec{\alpha}\cdot\vec{p} + mc^2\beta)\psi + \left(-\frac{e}{c}\vec{\alpha}\cdot\vec{A} + e\phi\right)\psi$$
$$= \mathcal{H}_0\psi + \mathcal{H}_{int}\psi.$$

Notamos a analogia da parte de interação

$$\mathcal{H}_{int} = -\frac{e}{c}\vec{\alpha}\cdot\vec{A} + e\phi$$

com o Hamiltoniano clássico de uma partícula num campo externo

$$e\phi - \frac{e}{c}\vec{v}\cdot\vec{A},$$

de onde podemos interpretar $\vec{\alpha}$ como o operador velocidade.